

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

Vitor Lucas de Oliveira Sena

As bolas de bilhar, os algoritmos quânticos e
tudo mais...

São Carlos
2020

Vitor Lucas de Oliveira Sena

As bolas de bilhar, os algoritmos quânticos e tudo mais...

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto

São Carlos
2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Sena, Vitor Lucas O.

As bolas de bilhar, os algoritmos quânticos e tudo mais... / Vitor Lucas de Oliveira Sena; orientador: Dr. Diogo de Oliveira Soares Pinto - São Carlos, 2020.
26 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física), Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Colisões elásticas. 2. Espaços de configuração. 3. Computação Quântica. 4. Algoritmo de Grover.

*Dedico este trabalho à minha mãe,
à minha madrinha, ao meu irmão e à minha avó.
Vocês são minha fortaleza,
e todo o meu amor.*

Agradecimentos

A muitas pessoas eu devo profundos agradecimentos pela conclusão deste trabalho.

Primeiramente, agradeço a Adam R. Brown, por ter proposto originalmente o isomorfismo discutido neste trabalho e por responder a nossos contatos sempre com atenção e cordialidade.

Aos meus colegas de iniciação científica: Clara Vidor, Luís Rodrigo, João Hiroyuki e Guilherme Zambom, e aos alunos de pós-graduação do grupo: André Malavazi e Laís dos Anjos, agradeço pelas valiosas sugestões nas prévias da minha apresentação.

Sou especialmente grato a meus colegas e amigos Yuri Asnis, Matheus Fernandes e Jallon Farias, por terem ouvido minhas prévias tantas e tantas de vezes que eu sequer sei quantas, e também pelas correções e pitacos no texto. Para além disso, agradeço por me terem feito companhia nesse ano em que todos estávamos mais distantes por conta da pandemia de covid-19; sem vocês, teria sido muito difícil.

Agradeço profundamente a meu orientador Diogo O. Soares-Pinto, por ter me apresentado esse problema tão interessante e pelo apoio de sempre; para além de um trabalho concluído, sinto que ganhei um bom amigo.

Por fim, agradeço ao Universo, por ter me permitido tentar entendê-lo um pouco mais.

Resumo

O matemático Gregory Galperin desenvolveu, em seu artigo “Playing Pool with π ”, um incrível método para calcular os dígitos do número π , com precisão arbitrária, fazendo uso de um sistema elementar da Física em Mecânica Clássica: colisões elásticas em uma dimensão. Inspirado no trabalho de Galperin, Adam Brown demonstrou que existe um isomorfismo entre o sistema físico usado por Galperin e um famoso algoritmo quântico de busca: o algoritmo de Grover. O presente projeto visa a entender o porquê desse isomorfismo. Desenvolvemos os resultados de forma original demonstrando, explicitamente, como o isomorfismo entre esses dois sistemas surge a partir de seus espaços de configuração.

Palavras-chave: Colisões elásticas. Espaços de configuração. Computação Quântica. Algoritmo de Grover.

Sumário

Agradecimentos	4
Resumo	5
1 Introdução	7
2 As bolas de bilhar	7
2.1 Sistema unidimensional de colisões elásticas	7
2.2 Evolução do sistema de bilhar	8
2.3 Contagem das colisões	11
3 Os algoritmos quânticos	14
3.1 O algoritmo de Grover	14
3.2 Uma análise geométrica	18
4 Tudo mais...	21
4.1 O bilhar de Grover	21
4.2 Discussões	23
5 Conclusão	25
Referências	26

1 Introdução

O biólogo Magnus Equist, ao estudar como nós, humanos, identificamos beleza nas coisas, constatou que essa habilidade está fortemente ligada ao nosso reconhecimento de padrões (1), o que em Matemática associamos a simetria. Daí, emerge uma das nossas capacidades mais poderosas nas ciências: a de conseguirmos enxergar em coisas a priori distantes relações que as conectam intimamente. Nesse sentido, a Física e a Matemática, muitas vezes, inspiram-nos de formas que parecem boas demais para ser verdade. A riqueza de aprendizado, conhecimento e fascínio que surgem disso, suscitam a concepção da ciência como não somente útil, mas intrinsecamente bela. O nosso trabalho visa estudar a não tão óbvia relação entre um sistema simples de bilhar clássico, um algoritmo de busca quântica e o número π .

O número π é, provavelmente, o número irracional mais importante da Matemática* e obtê-lo sempre foi um desafio. Matemáticos desenvolveram métodos da Aritmética (e.g. séries geométricas) à Computação (e.g. método de Monte Carlo) para calcular esse número, e também alguns bem curiosos como o método das agulhas de Buffon (2). Entretanto aquele descrito na Sec.2 deste trabalho é um dos menos ortodoxos dentre todos esses. Tal método foi desenvolvido pelo matemático Galperin (3), ele utilizou um sistema bastante familiar para qualquer físico: duas bolas colidindo elasticamente entre si e com uma parede, também conhecido por pesquisadores de sistemas dinâmicos como um problema de bilhar.

A. B. Katok, coloquialmente, disse que os problemas de bilhar são uma espécie de playground para físicos e matemáticos. Nós podemos entender essa afirmação de um ponto de vista lúdico - que não deixa de estar correto, ou de um ponto de vista mais sério, entendendo que ele se referenciou a esse tipo de sistema como um “solo de testes” para hipóteses, conjecturas e relações (4). Foi nessa brincadeira que Galperin concluiu que, desse problema unidimensional de colisões, poderia-se aferir os dígitos de π , com uma precisão arbitrária, simplesmente contando o número de colisões no sistema.

Como se não bastasse esse interlúdio bastante exótico, o físico Adam Brown propôs um isomorfismo entre esse sistema de bilhar e o algoritmo quântico de busca (5). O que nós fizemos, portanto, foi concatenar todos esses assuntos num só lugar. Inspirados no trabalho (6), derivamos o resultado que comprova como o número π surge do sistema de bilhar definido por Galperin; demonstramos, com uma análise original, como funciona o algoritmo de Grover; e, ao final, traçamos discussões a respeito de ambos os sistemas, apresentando, dentre outras coisas, uma proposta de revisão a um dos resultados obtidos por Adam Brown.

2 As bolas de bilhar

Um sistema de bilhar é um sistema de partículas, numa região limitada, colidindo entre si e com as fronteiras dessa região. Esse nome é, de fato, inspirado no famoso jogo de bilhar de mesas retangulares, mas pode-se elaborar tal sistema de maneira mais abstrata, variando-se a dimensão e forma dessa “mesa” e a quantidade e tipo de bolas em jogo.

2.1 Sistema unidimensional de colisões elásticas

O sistema tratado aqui será unidimensional. Ele é constituído de duas bolas diferentes, uma com massa M e outra com massa m , em que $M \geq m$; e de uma parede que considera-se

*Discutivelmente, o número de Euler (e) divide o pódio com ele.

ter massa infinita. Para facilitar a comunicação, iremos nos referir às bolas como “bola M ” e “bola m ”, respectivamente.

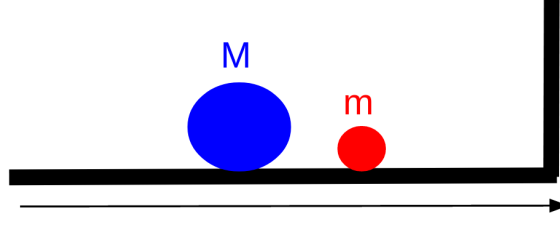


Figura 1: Sistema de bilhar 1D de dois corpos. Fonte: Elaborada pelo autor.

Embora, na Fig.1, as bolas possuam dimensão, isso é apenas ilustrativo - consideremo-las partículas pontuais. Todas as colisões são perfeitamente elásticas, o sistema como um todo encontra-se em repouso a partir de um referencial inercial e não existe qualquer tipo de atrito ou dissipação no problema (7). O sentido positivo das velocidades é da esquerda para a direita. Por mais simplificada que essa construção possa parecer, ela será suficiente para depreender de tudo que precisamos.

Num primeiro momento, o nosso objetivo é identificar como esse sistema se relaciona com o número π . Galperin abordou tal problema* num artigo que veio a público em 2003 (3), no qual ele respondeu a seguinte pergunta: dadas duas bolas inicialmente sem velocidade, como as ilustradas na Fig.1, ao ser concedida uma velocidade inicial positiva v à bola M , qual o número de colisões máximo que este sistema terá? Ele concluiu que

$$k \equiv \#_{\text{colisões}} = \left\lceil \pi \sqrt{\frac{M}{m}} \right\rceil \quad (1)$$

onde $\#$ denota *número* e $\lfloor a \rfloor$ denota o menor inteiro mais próximo de um número real a .

Veja desse resultado que se, por exemplo, $M/m = 100^d$, sendo d um número natural**, o número de colisões no sistema será os dígitos de π , sem a vírgula, até a d -ésima casa decimal. Dedicaremos-nos a provar o resultado da Eq.(1) ao longo de todo o resto da Sec.2.

2.2 Evolução do sistema de bilhar

Como construído, o sistema envolve dois corpos movendo-se linearmente no espaço, livres para colidir entre si e com uma parede. Essa construção é completamente clássica e, como as colisões são perfeitamente elásticas, duas leis de conservação básicas devem ser respeitadas, a de energia e a de momento linear:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = E = \text{constante}, \quad (2)$$

$$Mv + mu = p(t), \quad (3)$$

em que v é a velocidade da bola M , e u , a velocidade da bola m . O fato de o momento linear ser dependente do tempo será explorado, com algum detalhe, na Sec.4.2. Por ora, busquemos modelar o comportamento do sistema.

*Veja também as Refs. (8, 9) para mais detalhes.

**Considere 0 um número natural.

No espaço de configuração das velocidades, a equação da energia configura uma elipse, mas guiados pela busca de simplicidade, é conveniente projetá-la numa circunferência; como ilustrada na Fig.2, a seguinte mudança de coordenadas vem a calhar: $y = \sqrt{m}u$, $x = \sqrt{M}v$. Com essa parametrização, as leis de conservação tornam-se

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \text{constante}, \quad (4)$$

$$y = \tilde{p}(t) - \sqrt{\frac{M}{m}}x, \quad (5)$$

onde $\tilde{p}(t) \equiv p(t)/\sqrt{m}$.

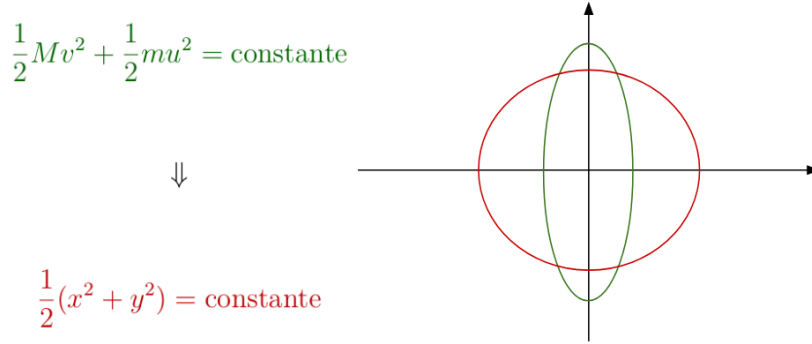


Figura 2: Mudança de coordenadas $y = \sqrt{m}u$, $x = \sqrt{M}v$. Fonte: Elaborada pelo autor.

Os estados de velocidades acessíveis ao sistema estão sobre a circunferência, cujo comprimento é fixo para uma dada energia, como visto na Eq.(2). Inicialmente, a bola de massa M move-se com uma velocidade v constante em direção à bola de massa m , que se encontra com velocidade nula. O ponto sobre a circunferência na Fig.3 representa o estado do sistema no plano xy .

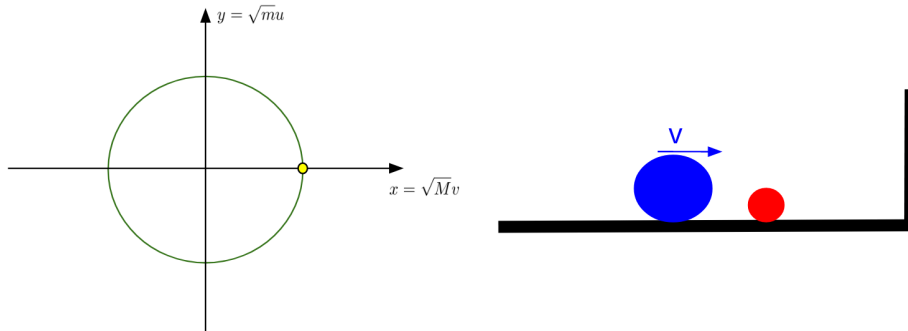


Figura 3: Estado inicial do sistema ($t = t_0$). Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo a velocidade das bolas, após a colisão, v' e u' , pela conservação de energia, temos:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}M(v')^2 + \frac{1}{2}m(u')^2,$$

e pela conservação do momento linear, temos:

$$Mv + mu = Mv' + mu'.$$

A solução desse sistema para u' e v' é

$$u' = \left(\frac{m - M}{M + m} \right) u + \left(\frac{2M}{M + m} \right) v, \quad (6)$$

$$v' = \left(\frac{2m}{M + m} \right) u + \left(\frac{M - m}{M + m} \right) v, \quad (7)$$

ou, na forma matricial, com $r \equiv M/m$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) & \left(\frac{2r}{1+r} \right) \\ \left(\frac{2}{1+r} \right) & -\left(\frac{1-r}{1+r} \right) \end{pmatrix}}_{\equiv R(r)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = R(r) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (8)$$

A operação $R(r)$ na Eq.(8), assim, representa a colisão das bolas uma com a outra no sistema físico. Após a primeira colisão, ambas estarão movendo-se para a direita (Fig. 4 à direita). Devido ao vínculo da energia, o ponto que representa o estado do sistema no espaço de configuração deverá continuar sobre a circunferência, mas onde exatamente? Bem, basta nos lembrarmos do vínculo do momento linear, que, no plano xy , é dado pela reta da Eq.(5).

Colisões entre as bolas deixam o momento total $\tilde{p}(t)$ inalterado, isto é, $\tilde{p}(t_0) = \tilde{p}(t_1)$. Portanto, o próximo ponto deve estar sobre a mesma reta que o primeiro. Tendo o coeficiente angular fixado, resta-nos uma única alternativa (Fig. 4 à esquerda).

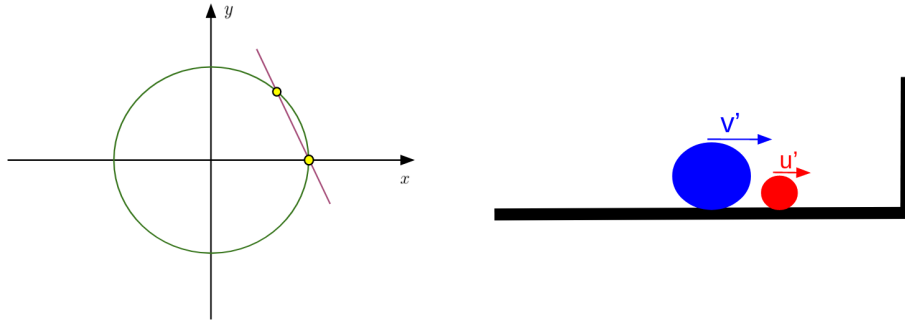


Figura 4: Sistema após a primeira colisão ($t = t_1$). Fonte: Elaborada pelo autor.

Já que $M \geq m$, constata-se que $u' > v'$, de forma que a próxima colisão da bola m certamente será com a parede*. Como estamos considerando uma parede de massa infinita, o momento linear da bola m inverterá seu sentido, passando de mu' para $-mu'$, o que também altera o valor do momento linear total do sistema, i.e., $\tilde{p}(t_1) \neq \tilde{p}(t_2)$. Algebricamente, temos:

*Para ver que $u' > v'$, subtrai-se as Eqs. (6) e (7), respectivamente; assim: $u' - v' = v - u > 0 \Rightarrow u' > v'$.

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv S} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \quad (9)$$

A operação S na Eq.(9) representa uma colisão da bola m com a parede. No espaço de configuração, isso se traduz numa reflexão do estado sobre o eixo x , conforme mostrado na Fig. 5.

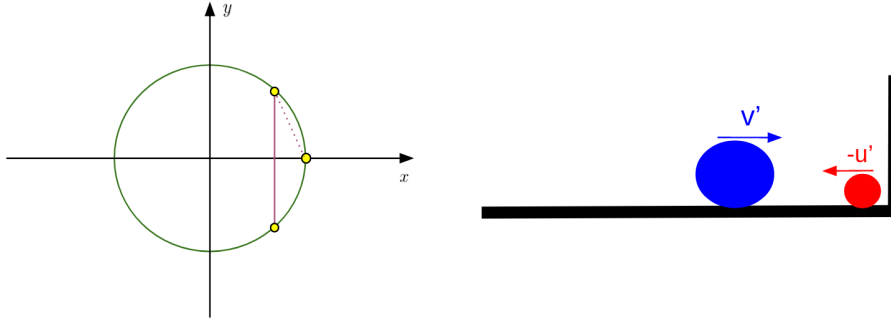


Figura 5: Sistema após a segunda colisão: bola m com a parede ($t = t_2$). Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim,

$$\begin{pmatrix} u^{(j)} \\ v^{(j)} \end{pmatrix} = SR(r) \begin{pmatrix} u^{(j-2)} \\ v^{(j-2)} \end{pmatrix},$$

Esses são os dois únicos tipos de colisão possíveis nesse sistema: da bola M com a bola m e da bola m com a parede. Note que, na próxima colisão bola-bola, a trajetória no espaço de configuração será descrita por uma outra reta com o mesmo coeficiente angular da primeira, mas deslocada um pouco à esquerda, justamente pela variação no momento linear total do sistema que aconteceu na colisão bola-parede (vide Eq.(5)). Dessa forma, a evolução do sistema pode ser descrita por sucessivas aplicações de $R(r)$ e S no estado inicial

$$\begin{pmatrix} u^{(j)} \\ v^{(j)} \end{pmatrix} = SR(r)SR(r)...SR(r)SR(r) \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ v^{(0)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

até o ponto em que $u^{(j)}$ e $v^{(j)}$ sejam ambos negativos (bolas indo para a esquerda no espaço real) e $|v^{(j)}| > |u^{(j)}|$, garantindo-nos que não haverá mais nenhum tipo de colisão no sistema. Chamaremos este estado de *estado terminal*.

2.3 Contagem das colisões

A construção da Sec.2.2 deve nos levar ao número de colisões k dado na Eq.(1). Como os pontos na Fig.6 representam os estados assumidos pelo sistema, a quantidade deles menos 1 (da configuração inicial) nos dá o número de colisões totais que ocorreram.

$$\#_{\text{estados}} - 1 = \#_{\text{colisões}} = \#_{\text{arcos correspondentes a } \theta}. \quad (11)$$

As retas transversais possuem o mesmo coeficiente angular, são paralelas entre si; assim como as verticais, obviamente. Logo, o ângulo formado entre essas retas é sempre o mesmo (θ), tais quais os arcos de circunferência que eles subtêm, conforme ilustrado na Fig.6. Dada a relação da Eq.(11), podemos contar o número de colisões a partir do número de arcos subtendidos por θ . Como é mais fácil trabalhar com ângulos a partir do centro da circunferência, faremos uso do Teorema do ângulo inscrito.

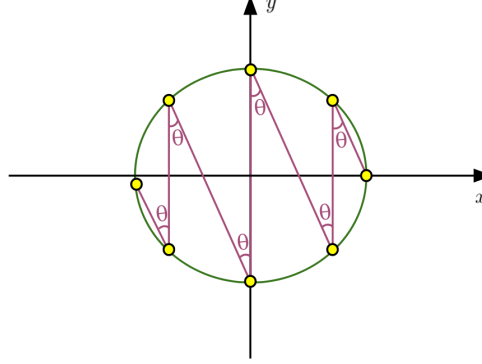


Figura 6: Ângulo formado entre as retas da Eq.(5) e a vertical. Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 1 (Teorema do ângulo inscrito) *Numa circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco.*

Vemos na Fig. 7 uma representação do Teorema 1.

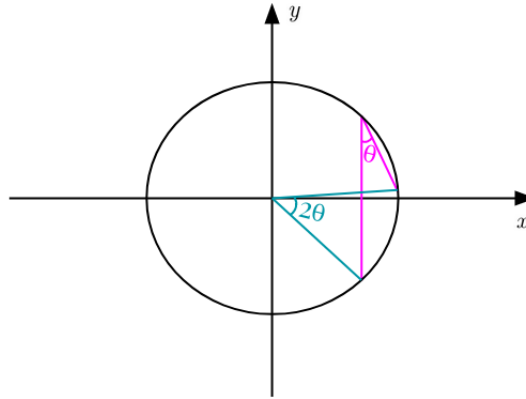


Figura 7: Ilustração do Teorema do ângulo inscrito. Fonte: Elaborada pelo autor.

Isso significa que, a cada colisão, cobre-se na circunferência do espaço de configuração um arco proporcional a 2θ , conforme vimos nas Figs. 4 e 5. Uma vez que a bola de massa M passa a ter uma velocidade negativa (estados passem ao segundo e terceiro quadrante no espaço de configuração), ela não pode voltar a ter sua velocidade aumentada positivamente, pois, nem a parede, nem a bola m podem contribuir para tal acréscimo, já que estão sempre à direita da

bola M . Em outras palavras, no espaço de configuração, o estado só pode caminhar da direita para a esquerda, sempre cobrindo novos arcos correspondentes a 2θ .

Então há um limite para a evolução do sistema - ele deve chegar, em algum momento, num estado terminal, já que o comprimento da circunferência é finito. A razão para isso é puramente geométrica e nos trará justamente a resposta da nossa pergunta: quantas colisões teremos no sistema até que ele alcance o estado terminal? Equivalentemente, quantos arcos proporcionais a 2θ podemos somar antes que o valor dessa soma supere 2π (comprimento da circunferência)?

$$2\theta + 2\theta + \dots + 2\theta < 2\pi \Rightarrow k\theta < \pi. \quad (12)$$

Por exemplo, se θ fosse 0.01, $k = 314$ respeitaria a inequação (12), já $k = 315$ a violaria. O número de colisões do sistema será, portanto, o maior k que não viola essa desigualdade.

O cálculo de θ é simples, basta lembrar (vide Eq.(5)) que o coeficiente angular da reta transversal à circunferência é $-\sqrt{\frac{M}{m}}$. Sendo θ o ângulo de referência,

$$\tan \theta = -\frac{1}{\text{coef ang}} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt{\frac{m}{M}} \Rightarrow \theta = \arctan \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (13)$$

A tabela abaixo sumariza esse resultado para alguns valores de $\sqrt{\frac{m}{M}}$.

Tabela 1: Valores de θ para diferentes razões M/m .

Razão entre as massas (M:m)	Fórmula para θ $\left(\arctan \sqrt{\frac{m}{M}}\right)$	Valor de θ
100:1	$\arctan \frac{1}{10}$	0.0996686524...
10000:1	$\arctan \frac{1}{100}$	0.0099996666...
1000000:1	$\arctan \frac{1}{1000}$	0.0009999996...
100000000:1	$\arctan \frac{1}{10000}$	0.0000999999...

Fonte: SANDERSON (6).

Pela Tabela 1, fica claro que $\arctan x \approx x$ quando x é muito pequeno - justamente o nosso caso. Perceba que, à medida que M aumenta, a aproximação melhora ainda mais. Uma maneira de justificar algebricamente essa aproximação é pela expansão de Taylor do $\arctan x$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \Rightarrow \arctan x = x - O(x^3),$$

significando que quando $x \ll 1$ haverá apenas um erro de ordem cúbica à aproximação.

Assim, dado que k é o número de colisões que acontecem no sistema, uma vez que $\theta = \arctan \sqrt{m/M} \approx \sqrt{m/M}$, temos

$$k\sqrt{\frac{m}{M}} < \pi,$$

ou seja, o maior k que não viola essa desigualdade, de fato, é descrito pela Eq.(1). Para o caso especial em que $M/m = 100^d$, encontra-se $k \left(\frac{1}{10}\right)^d < \pi$. O maior inteiro k que não satura esta desigualdade será igual aos dígitos de π até a d -ésima casa decimal, como queríamos demonstrar.

3 Os algoritmos quânticos

Um algoritmo é uma sequência finita de ações executáveis que visam chegar à solução de um determinado tipo de problema (10), sendo os algoritmos quânticos aqueles que se utilizam de princípios da teoria quântica para chegar a essa resposta. Esta definição é geral, aqui, no entanto, ateremo-nos a um problema específico: realizar uma busca numa base de dados aleatória. Por exemplo, imagine que gostaríamos de encontrar o caminho mais curto entre duas cidades A e B . Um algoritmo para encontrá-lo seria: percorrer todas as N rotas possíveis, enquanto armazena-se numa memória as distâncias de cada uma delas para, ao fim, compará-las e determinar a mais curta. Essa descrição bem ilustra que um algoritmo clássico leva, invariavelmente, algo da ordem de N iterações ($\mathcal{O}(N)$) para encontrar o caminho ótimo entre A e B . No entanto, existe um algoritmo quântico, idealizado por Lov Grover (11), que se propõe a solucionar este problema em $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ iterações.

O potencial do algoritmo de Grover (como este é conhecido) em solucionar problemas de busca com uma aceleração quadrática se comparado ao seu equivalente clássico, torna-o digno da nossa atenção. Vejamos como esta melhora é possível.

3.1 O algoritmo de Grover

Dentre as várias maneiras de se fazer Computação Quântica (10, 12), fundamentaremos a análise a seguir num modelo bastante simples: um vetor $|\psi\rangle$, que encapsula um certo estado inicial, terá sua evolução dada por aplicações sucessivas de operadores unitários U_i sobre ele até que chegue num estado final $|\psi_k\rangle$; ou seja, $|\psi_k\rangle = U_k \dots U_1 |\psi\rangle$. Os vetores $|\psi\rangle$ pertencem a um espaço de Hilbert de dimensão N , e U_i são operadores associados a esse espaço.

O problema de busca pode ser definido assim: numa base de dados (\mathbb{X}) de N elementos, queremos encontrar n dos quais são soluções do nosso problema. Claramente, $n \leq N$. Se a solução for única, $n = 1$. Para sermos o mais democráticos possível, digamos que o nosso estado inicial, representando os elementos do conjunto \mathbb{X} , é uma superposição igualmente balanceada nas amplitudes de probabilidade de todos os possíveis estados $\{|x\rangle\}$, que formam uma base ortonormal. Cada estado dessa base mapeia um único elemento do conjunto de busca. Assim,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle. \quad (14)$$

Grover propôs que atuação iterativa de dois operadores é suficiente para resolver esse problema. O primeiro operador é chamado de *oráculo*. Digamos que a solução do nosso problema seja descrita por $|s\rangle$, o que o oráculo faz é inverter a amplitude de probabilidade deste estado dentro de $|\psi\rangle$. Sendo I a identidade, o operador que descreve essa ação é

$$U_s \equiv I - 2|s\rangle\langle s|. \quad (15)$$

A segunda operação é a chamada *inversão em torno da média*. Ficará claro o porquê desse nome na Sec.3.2, mas - por enquanto - vamos nos ater a sua forma operacional

$$U_{\psi}^{\perp} \equiv 2 |\psi\rangle \langle \psi| - I. \quad (16)$$

Para que fique mais explícito o funcionamento do algoritmo de Grover, façamos o exemplo de $N = 8$. Classicamente, esperaríamos, em média, $N/2 \sim 4$ iterações até que a solução fosse encontrada (10); quanticamente, esperaríamos $\sim \sqrt{N} \sim 2$, isto é, apenas duas iterações!*

Façamos o cálculo do caso quântico. A Eq.(14) para $N = 8$ resulta no estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |2\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |3\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |4\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |5\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |6\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}} |7\rangle,$$

retratado esquematicamente na Fig.8.

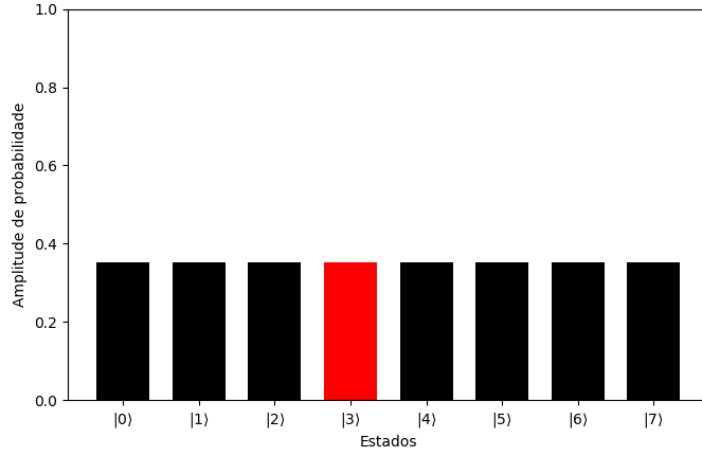


Figura 8: Estado inicial do algoritmo de Grover para $N = 8$. Fonte: Elaborada pelo autor.

Busquemos, por exemplo, o valor $|s\rangle = |3\rangle$. Pela Eq.(15), vê-se que $U_s = I - 2 |3\rangle \langle 3|$, e então

$$U_s |\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |1\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |2\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}} |3\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |4\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |5\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |6\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |7\rangle$$

$$U_s |\psi\rangle = |\psi\rangle - \frac{2}{2\sqrt{2}} |3\rangle.$$

Estado este representado na Fig.9.

*Você pode argumentar (com razão) que $\sqrt{8}$ é muito mais próximo que 3 do que é de 2. No entanto, mostraremos na seção seguinte que o algoritmo de Grover retorna a solução com boa precisão para $\approx \left\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \right\rfloor$.

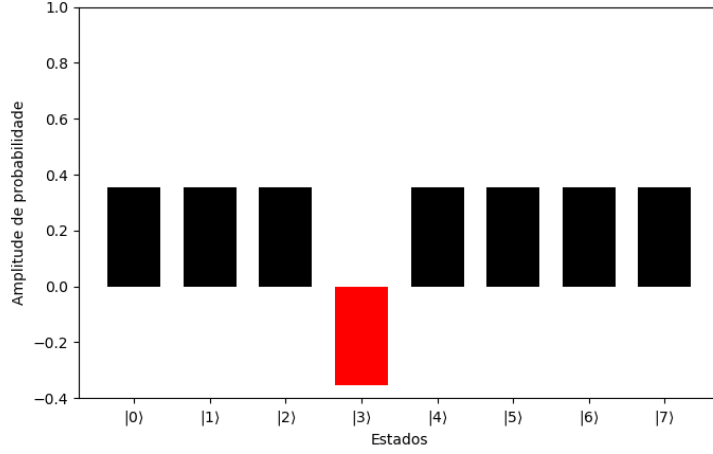


Figura 9: Estado após a primeira aplicação de U_s . Fonte: Elaborada pelo autor.

A próxima operação é U_ψ^\perp , definida na Eq.(16),

$$\begin{aligned}
 U_\psi^\perp U_s |\psi\rangle &= [2|\psi\rangle\langle\psi| - I] \left[|\psi\rangle - \frac{2}{2\sqrt{2}}|3\rangle \right] \\
 &= 2|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle - \frac{4}{2\sqrt{2}}|\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|3\rangle}_{1/\sqrt{8}} - |\psi\rangle + \frac{2}{2\sqrt{2}}|3\rangle \\
 &= \frac{1}{2}|\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle.
 \end{aligned}$$

Mas note que $|\psi\rangle$ possui uma componente $|3\rangle$. Escrevendo a Eq.(14) para $N = 8$ e separando essa componente, temos o estado

$$\begin{aligned}
 U_\psi^\perp U_s |\psi\rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^7 |x\rangle \right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}|3\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle, \\
 U_\psi^\perp U_s |\psi\rangle &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^7 |x\rangle + \frac{5}{4\sqrt{2}}|3\rangle,
 \end{aligned}$$

representado na Fig.10.

Essas duas operações, nessa ordem, formam o que chamamos de *iteração de Grover* (G), de maneira que $G \equiv U_\psi^\perp U_s$. Uma vez ilustrada a amplificação da probabilidade de obter o estado desejado, faremos os cálculos da segunda iteração de Grover com menos detalhes. As etapas são as mesmas, primeiro, atua-se o oráculo

$$U_s G |\psi\rangle = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^4 |x\rangle - \frac{5}{4\sqrt{2}}|3\rangle$$

e, em seguida, a inversão em torno da média

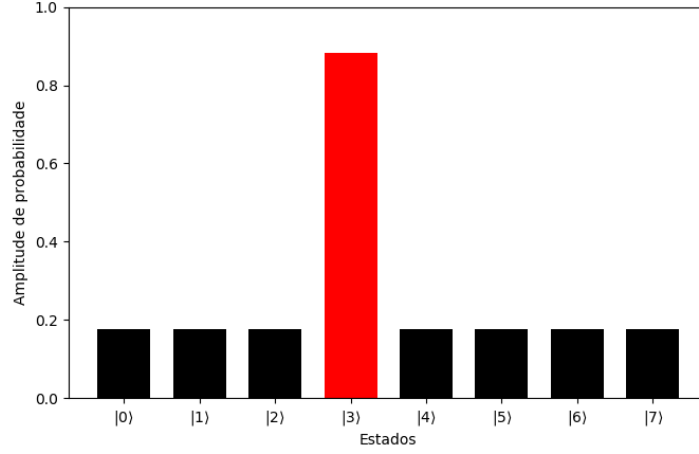


Figura 10: Estado após a primeira aplicação de U_ψ^\perp . Fonte: Elaborada pelo autor.

$$U_\psi^\perp U_s G |\psi\rangle = -\frac{1}{8\sqrt{2}} \sum_{\substack{x=0 \\ x \neq 3}}^4 |x\rangle + \frac{11}{8\sqrt{2}} |3\rangle$$

$$G^2 |\psi\rangle = -\frac{1}{8\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}} |1\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}} |2\rangle + \frac{11}{8\sqrt{2}} |3\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}} |4\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}} |5\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}} |6\rangle - \frac{1}{8\sqrt{2}} |7\rangle.$$

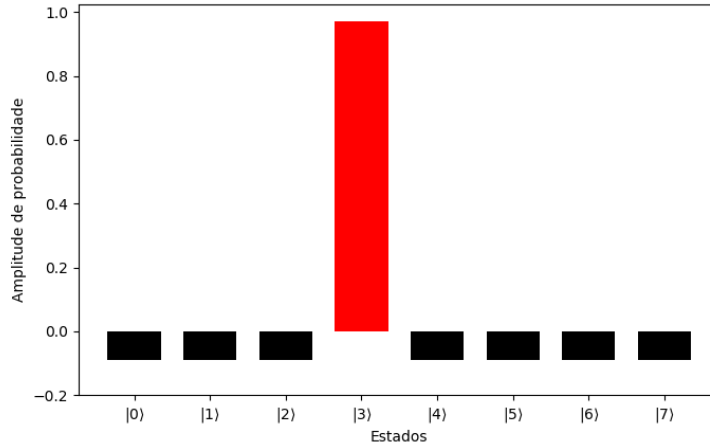


Figura 11: Estado após a segunda iteração de Grover. Fonte: Elaborada pelo autor.

Se medirmos o estado $G^2 |\psi\rangle$ (ilustrado esquematicamente na Fig.11), obteríamos o elemento $|3\rangle$ com probabilidade $\left| \frac{11}{8\sqrt{2}} \right|^2 = 121/128 \approx 94,5\%$. Mesmo para poucos q-bits^{*}, o algo-

^{*} O q-bit é a unidade básica de informação quântica, tal qual o bit é a unidade básica de informação clássica. Os q-bits formam uma base num espaço de Hilbert e nos permitem descrever, por exemplo, um estado genérico de 1 q-bit como uma superposição do tipo $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, em que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

ritmo de Grover responde corretamente à busca com boa margem, a probabilidade de acerto é 17 vezes maior que a de erro, e a precisão de acerto só melhora à medida que aumentamos N .

3.2 Uma análise geométrica

Voltemo-nos agora ao nosso objetivo central: encontrar o isomorfismo entre o sistema de bilhar e o algoritmo de Grover. Simularemos uma busca numa base de dados \mathbb{X} com N elementos, o estado da Eq.(14) encapsula essa base de dados. Para facilitar nossa análise, consideraremos dois subconjuntos: \mathbb{S} , com n elementos (as *soluções* da busca), e \mathbb{W} , com $N - n$ elementos (*não-soluções* da busca), tal que $\mathbb{X} = \mathbb{S} \cup \mathbb{W}$. Respeitando a normalização, define-se os estados que representam uma superposição dos elementos de \mathbb{S} e \mathbb{W} , respectivamente.

$$|s\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{x \in \mathbb{S}} |x\rangle; \quad (17)$$

$$|w\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N-n}} \sum_{x \in \mathbb{W}} |x\rangle. \quad (18)$$

Usando estes resultados na Eq.(14), temos

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{n}{N}} |s\rangle + \sqrt{\frac{N-n}{N}} |w\rangle. \quad (19)$$

Inspirados no desenvolvimento feito por Kaye, et al. no livro (12), descreveremos as amplitudes de probabilidade em termos de um ângulo θ

$$\sin \theta \equiv \sqrt{\frac{n}{N}}, \quad (20)$$

de maneira que

$$|\psi\rangle = \sin \theta |s\rangle + \cos \theta |w\rangle. \quad (21)$$

Para nos auxiliar nas contas, construiremos um vetor ortogonal $|\phi\rangle$ a $|\psi\rangle$, dado por

$$|\phi\rangle = \cos \theta |s\rangle - \sin \theta |w\rangle \quad (22)$$

Também nos ajudará definir um espaço de coordenadas ortonormal em $|w\rangle$ e $|s\rangle$. Nesse espaço, podemos delinear uma circunferência de raio unitário fazendo alusão ao fato de a probabilidade estar normalizada a 1. Isso implica que qualquer vetor de estado nesse espaço deve estar restrito de tal circunferência. Na Fig.12, ilustra-se o espaço de configuração que descreve esse sistema.

Perceba das Eqs. (21) e (22), que $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ também forma uma base ortonormal, de maneira que podemos alternar nossa descrição entre esta e a base $\{|w\rangle, |s\rangle\}$, visto que

$$|w\rangle = \cos \theta |\psi\rangle - \sin \theta |\phi\rangle; \quad (23)$$

$$|s\rangle = \sin \theta |\psi\rangle + \cos \theta |\phi\rangle. \quad (24)$$

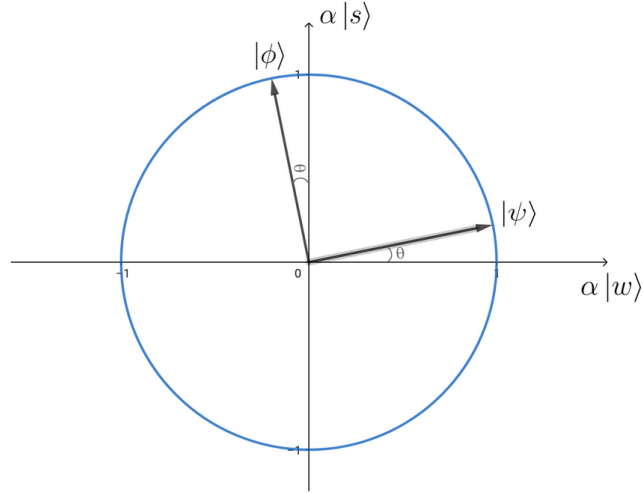


Figura 12: Gráfico do estado inicial no algoritmo de Grover. Nos eixos, α é uma constante maior que um ($\alpha > 1$) posta apenas para melhorar a escala do gráfico. Fonte: Elaborada pelo autor.

Usaremos esse “truque” de alternar entre as bases para facilitar as contas. Lembre-se, o que nos interessa é saber como $|\psi\rangle$ evolui. Vejamos o que acontece em cada etapa do algoritmo. Primeiro, na aplicação de U_s :

$$U_s |\psi\rangle = -\sin \theta |s\rangle + \cos \theta |w\rangle = \cos(2\theta) |\psi\rangle - \sin(2\theta) |\phi\rangle.$$

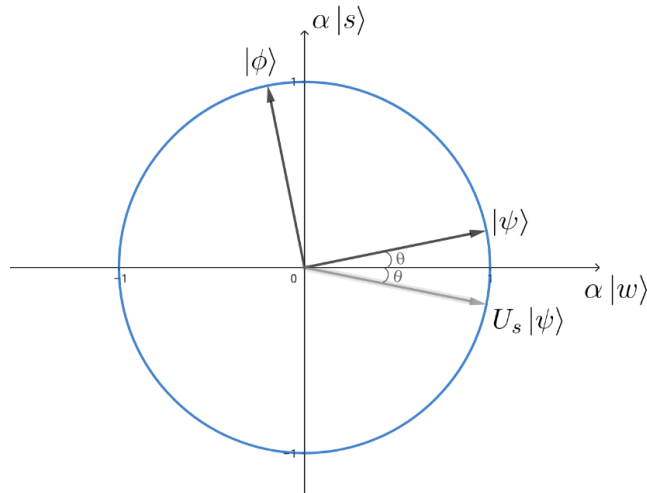


Figura 13: Primeira aplicação de U_s sobre o estado inicial. Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Fig.13, vê-se que, no espaço de estados, U_s faz uma reflexão em torno do eixo $|w\rangle$. Se nós olharmos para as definições dos operadores nas Eqs. (15) e (16) e comparámo-los, fica claro que, na base $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$, U_ψ^\perp faz uma reflexão em torno de $|\psi\rangle$, por isso o nome “inversão em torno da média”. Assim, quando calculamos $U_\psi^\perp U_s |\psi\rangle$, obtemos (esquema na Fig.14):

$$U_\psi^\perp U_s |\psi\rangle = \cos(2\theta) |\psi\rangle + \sin(2\theta) |\phi\rangle = \sin(3\theta) |s\rangle + \cos(3\theta) |w\rangle$$

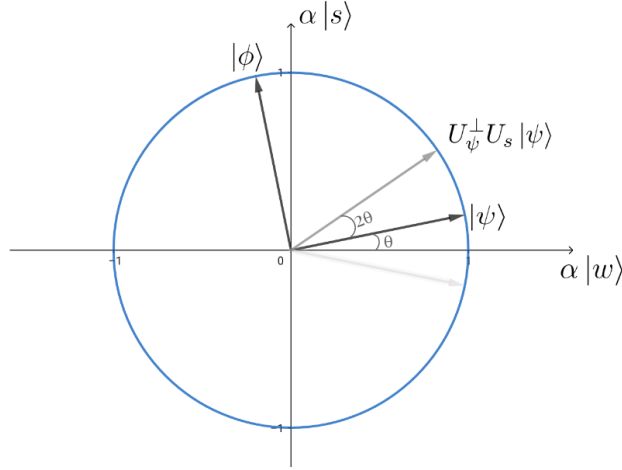


Figura 14: Aplicação de U_ψ^\perp sobre o estado $U_s |\psi\rangle$. Final da primeira iteração de Grover. Fonte: Elaborada pelo autor.

A combinação dessas duas reflexões é uma rotação. Assim, podemos induzir que cada iteração de Grover rotaciona em 2θ o vetor de estado. Destarte, a forma geral do estado após k iterações de Grover é

$$(U_\psi^\perp U_s)^k |\psi\rangle = \cos(2k\theta) |\psi\rangle + \sin(2k\theta) |\phi\rangle; \quad (25)$$

$$(G)^k |\psi\rangle = \sin((2k+1)\theta) |s\rangle + \cos((2k+1)\theta) |w\rangle. \quad (26)$$

O objetivo do algoritmo é fazer com que o estado inicial tenda o tanto quanto possível à solução, ou seja, queremos $(G)^k |\psi\rangle \rightarrow |s\rangle$. O menor k que faz isso é aquele que torna o seno na Eq.(26) o mais próximo possível de 1, por isso, é necessário impor o vínculo $(2k+1)\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$(2k+1)\theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow k \leq \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{4} \frac{1}{\arcsin \sqrt{\frac{n}{N}}} - \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Como sabemos, para $x > 0$, temos:

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{\arcsin x},$$

que tende à igualdade para x pequeno. Assim, o maior k que não viola a desigualdade (27) também é

$$k = \left\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{N}{n}} - \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (28)$$

Limitamos k inferiormente pela razão lógica de que queremos nos aproximar ao máximo da solução, mas sem correr o risco de passar dela. Assim, as iterações de Grover para um caso em que $k = 3$ funcionam como ilustrado na Fig.15.

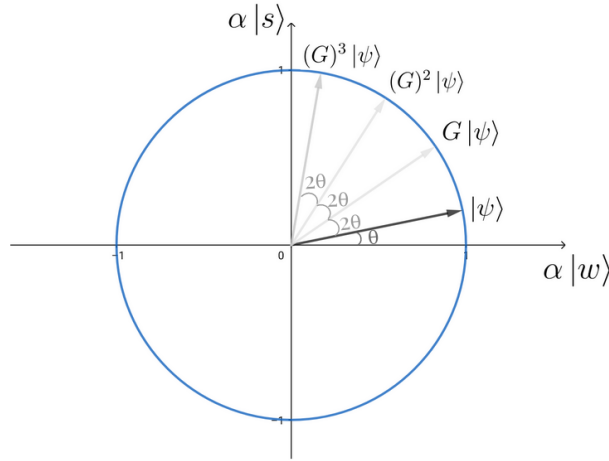


Figura 15: Iterações de Grover para $k = 3$. Fonte: Elaborada pelo autor.

4 Tudo mais...

Discutamos as simetrias e alguns detalhes importantes de ambos os sistemas fazendo as considerações necessárias.

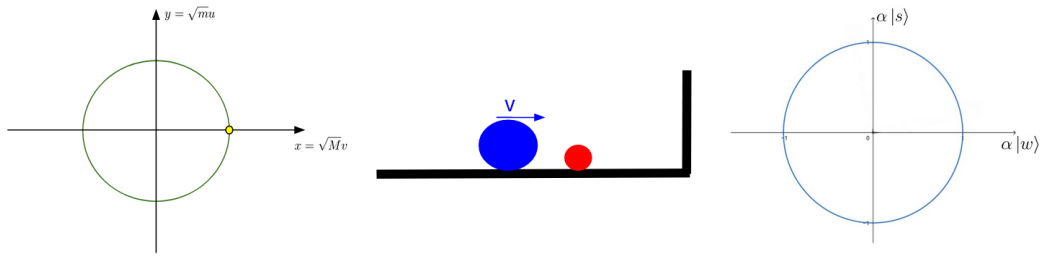
4.1 O bilhar de Grover

Mapeemos o problema de bilhar no algoritmo de Grover e tentemos enxergar o isomorfismo entre eles de forma nítida. Algumas diferenças surgem de como lemos o problema, por exemplo, o algoritmo de Grover não conta a primeira colisão, ele começa a partir dela. Outra distinção está no método de contagem, já que as iterações de Grover correspondem a duas colisões simultâneas. Se ao invés disso contássemos o número de operações unitárias U_s e U_ψ^\perp mais a condição inicial no algoritmo, teríamos $\tilde{k} \equiv 2k + 1$ na Eq.(26). Assim $\tilde{k}\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e, portanto

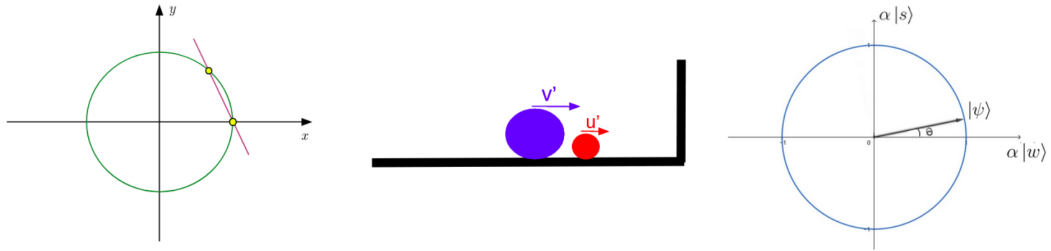
$$\tilde{k} = \left\lfloor \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{n}} \right\rfloor, \quad (29)$$

com \tilde{k} sendo o número total de estados durante todo o processo. Note a semelhança da Eq.(29) com a Eq.(1). A diferença desse fator $1/2$ vem do fato de, no algoritmo de Grover, percorrermos apenas metade do espaço de estados. Se modelássemos o número de operações no algoritmo de Grover pelas colisões no sistema de bilhar, deveríamos parar no momento em que a bola M transferisse toda a sua energia para a bola m , ou seja, na iminência de o sinal da velocidade da bola M se tornar negativo. Isso corresponde exatamente a percorrer metade do espaço de configuração, daí o fator $1/2$. Veja que não há problema em parar em metade do espaço de configuração porque o critério de parada no algoritmo de Grover não é consequente, mas impositivo. Ilustra-se na Fig.16 a evolução dos dois espaços de configuração pelo sistema de bolas de bilhar.

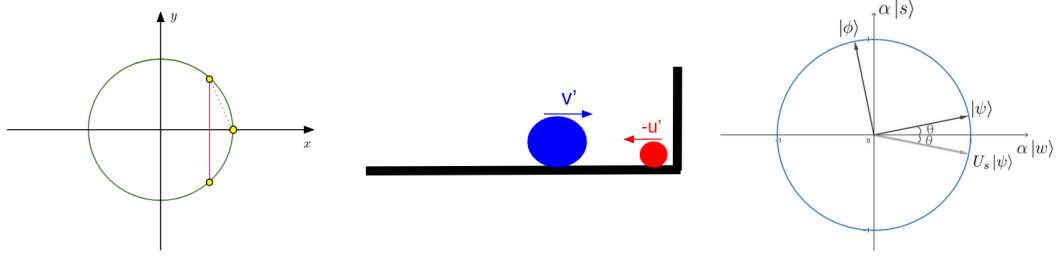
Analisando os detalhes dessa relação, conseguimos construir um isomorfismo entre cada entidade física dos dois sistemas, como mostrado na Tabela 2.



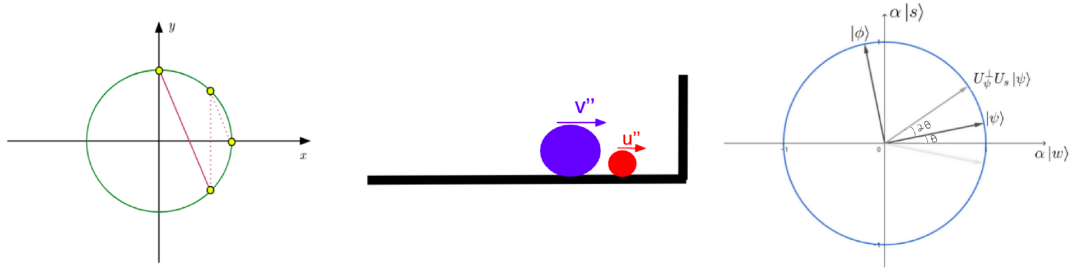
(a) Estado inicial. Não aparece no algoritmo de Grover.



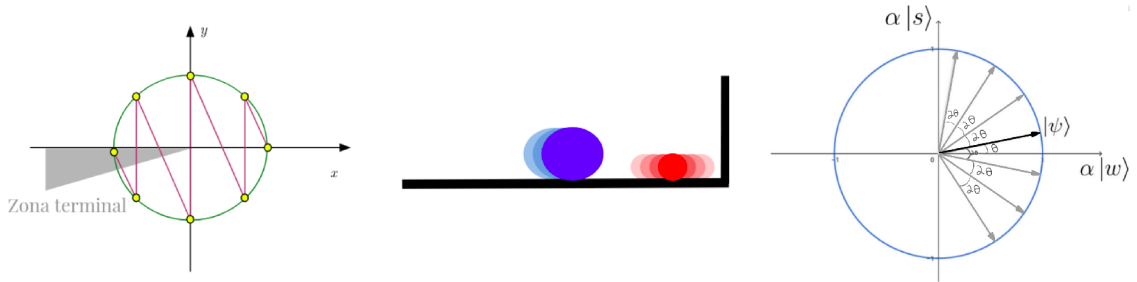
(b) Primeira colisão



(c) Segunda colisão, reflexão na parede.



(d) Terceira colisão geral, segunda entre as bolas.



(e) Evolução genérica do sistema.

Figura 16: Comparação entre os espaços de configuração sob a perspectiva do problema de bilhar. Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 2: Mapa do isomorfismo entre o sistema de bilhar e o algoritmo de Grover.

Problema de bilhar	Algoritmo de Grover
Massa da bola maior: M	Número de elementos na base de dados: N
Massa da bola menor: m	Número de soluções na base de dados: n
Colisão entre as bolas: operação $R(r)$	Inversão em torno da média U_{ψ}^{\perp}
Colisão bola m - parede: operação S	Oráculo U_s
Alternância entre colisão bola-bola e bola-parede	Alternância entre U_s e U_{ψ}^{\perp}
Conservação da energia cinética	Conservação da probabilidade
Conservação do espaço de configuração	Unitariedade das operações
Movimento puramente horizontal	Funções de onda puramente reais
Ordem das colisões importa	U_s e U_{ψ}^{\perp} não comutam

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Discussões

- **Momento linear total variável**

Quando consideramos, na elaboração do sistema de bilhar (Sec.2.1), que a parede tem massa infinita, ela acaba por funcionar como uma “ladra de momento linear” do sistema, uma vez que, a cada colisão bola-parede, o momento linear total diminui. Veja que “aumentar” ou “diminuir” aqui depende apenas de uma convenção. Se o sentido de orientação do sistema fosse invertido, a parede seria uma “geradora de momento linear”, o que não mudaria o problema como um todo - o que interessa é a variação do momento linear total em módulo.

- **Critério de parada**

Pode não ser tão óbvio que o sistema de bilhar vá chegar a um estado terminal, como foi afirmado na Sec.2.2. A princípio, existem três possibilidades: 1) a velocidade da bola M é sempre positiva e a bola m oscila, indefinidamente, entre a bola M e a parede; 2) o sistema evolui até que a bola M passe a ter velocidade negativa, enquanto a bola m continua oscilando entre ela e a parede, indefinidamente; 3) o sistema chega a um estado terminal em que $v^{(j)}$ e $u^{(j)}$ são ambas negativas e $|v^{(j)}| > |u^{(j)}|$, garantindo que elas não vão mais se tocar.

As situações 1) e 2) implicam um número infinito de colisões, enquanto 3), um número finito. Para nossa análise, usemos nas Eqs. (2) e (3), $r = M/m$, $\tilde{E} = 2E/m$ e $\tilde{p} = p(t)/m$,

$$u^2 + rv^2 = \tilde{E} \quad u + rv = \tilde{p}$$

A solução deste sistema para u e v é

$$u = \frac{\tilde{p} \pm \sqrt{r(\tilde{E}r + \tilde{E} - \tilde{p}^2)}}{r + 1} \quad v = \frac{r\tilde{p} \pm \sqrt{r(\tilde{E}r + \tilde{E} - \tilde{p}^2)}}{r(r + 1)}$$

Como as velocidades devem ser valores reais, há um limite para o quanto \tilde{p} pode aumentar: $\tilde{p}^2 \leq \tilde{E}(r+1) \Rightarrow |p| \leq \sqrt{2E(M+m)}$. Este resultado descarta a possibilidade 1), pois, para que ela fosse verdade, a bola m teria sua velocidade, em módulo, aumentada a passos cada vez maiores, fazendo o momento linear total do sistema, também em módulo, aumentar indefinidamente.

Embora 2) não possa ser descartada apenas com esse argumento ($|p|$ poderia tender assintoticamente ao seu limite superior), já sabemos com certeza que o sinal da velocidade da bola M irá inverter em algum momento, ou seja, o estado vai passar para o lado esquerdo do espaço de configuração. Daí podemos facilmente usar o argumento já apresentado na Seção 2.3 de que, dado que o sistema evolui a rotações de 2θ no espaço de configuração, como o comprimento da circunferência é finito, o número de colisões também deve ser finito. Isso exclui a possibilidade 2). Logo, o sistema evoluirá segundo 3). No algoritmo de Grover, o critério de parada é imposto. Nós escolhemos parar a evolução do sistema após um número específico de iterações.

• Aproximações espúrias?

As conclusões tanto para o número de colisões do problema de bilhar, quanto para o número de iterações do algoritmo de Grover, baseiam-se em aproximações. No primeiro caso, que $\arctan x \approx x$ e, no segundo caso, que $\arcsin x \approx x$, em ambos considerando x pequeno.

Não obstante essas aproximações pareçam bastante razoáveis, o problema aqui não é tão simples. Isso porque nós estamos lidando com truncamentos da parte inteira de números reais, assim, uma pequena flutuação numa longínqua casa decimal é suficiente para alterar o nosso resultado. Uma vez que essas aproximações sejam boas, as flutuações advindas desse truncamento não diferirão por mais que 1 do resultado “exato”. Mas isso ainda nos é um problema, pois se o nosso objetivo é contar exatamente o número de colisões (ou iterações) do sistema, errar por ± 1 significa errar completamente!

Consideremos $M/m = N/n = 100^d$ (com $d \neq 0$). Para garantir nosso acerto, devemos assegurar que as relações das Eqs. (30) e (31) sejam verdadeiras,

$$\left\lfloor \frac{\pi}{\arctan(10^{-d})} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\pi}{10^{-d}} \right\rfloor; \quad (30)$$

$$\left\lfloor \frac{\pi}{2} \frac{1}{\arcsin(10^{-d})} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\pi}{2} \frac{1}{10^{-d}} \right\rfloor. \quad (31)$$

Assim como Galerín, somos fortemente inclinados a acreditar que estas relações são verdadeiras, embora não sejamos capazes de prová-las. Este é um problema ainda em aberto na matemática e, segundo Galperín, a melhor referência para tentar entendê-lo é a do matemático Alfred van der Poorten, que pode se encontrada na Ref. (13).

No entanto, a crença nos resultados (30) e (31) não é cega. Ela se fundamenta nos resultados (32) e (33), que são passíveis de prova, como as feitas na Ref.(3).

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{\arctan(10^{-d})} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{10^{-d}} \right\rfloor; \quad (32)$$

$$\left\lfloor \frac{\pi}{\arctan(1/d)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\pi}{1/d} \right\rfloor. \quad (33)$$

A extensão destes para arcsin pode ser feita seguindo os mesmos passos lógicos na prova de Galperin. Ainda que isso não seja satisfatório para fazer-nos confiar nos resultados das Eqs. (30) e (31), aqui vai um argumento derradeiro: neste caso, as aproximações $\arctan x \approx x$ e $\arcsin x \approx x$ *podem* ser um problema se dentre os $2d$ primeiros dígitos de π nós tivermos uma cadeia de d números 9 em sequência (3), o que parece ser uma coisa bastante difícil de acontecer. Por exemplo, nos primeiros 100 milhões de dígitos de π , a maior cadeia de 9s que aparece tem tamanho oito, mas precisaríamos de uma cadeia de tamanho 50 milhões para possivelmente violar as igualdades nas Eqs. (30) e (31), o que soa bastante improvável de acontecer(3, 6).

Essa área em si envolve tantos conceitos complexos e pode desenrolar tantas discussões que mereceria um trabalho completo apenas dedicado a ela.

- **Revisão do resultado de Adam Brown**

Em seu artigo (5), Adam Brown utilizou como fórmula de contagem das iterações de Grover, no caso de $n = 1$, a relação: $\left\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{N-1} \right\rfloor$, que difere da que nós encontramos na Eq.(28) por um fator $1/2$, o qual nós consideramos ser relevante. Como discutimos na Sec.4.1, esse fator equivale a começar a contagem a partir de uma primeira (semi-)colisão no sistema de bilhar, e isso faz diferença na contagem final. Isso porque, ainda que para valores de N grande, as partes $\left\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{N-1} \right\rfloor$ e $\left\lfloor \frac{\pi}{4} \sqrt{N} \right\rfloor$ das nossas expressões equivalham, se o número real dentro de $\lfloor \rfloor$ tiver o primeiro dígito após a vírgula menor ou igual 4, o resultado final das contagens nossa e do Brown diferirá. Por exemplo, consideremos o caso $N = 100^3$, em que as nossas expressões, excluindo o fator $1/2$, deem ambas $\lfloor 785,4 \dots \rfloor$; subtrair $1/2$ desse valor, muda-o para $\lfloor 784,9 \dots \rfloor = 784$, alterando o resultado da contagem.

5 Conclusão

Honestamente, o método de bilhar não é nem de longe o melhor para se calcular π , ele não só assume condições extremamente idealizadas, tornando-o fisicamente impraticável, como leva tempos absurdos para ser processado por um algoritmo computacional iterativo. Da mesma forma, não seria nada prático processar o algoritmo de Grover utilizando este sistema. Ainda assim, é encantador como de um problema aparentemente tão simples, conseguimos desdobrar discussões tão profundas, de algoritmos quânticos a teoria de números. Como disse Adam Brown: “Utilizar este sistema de bilhar para processar o algoritmo de Grover não seria nem fácil e nem útil, mas seria um jeito pitoresco de procurar π em meio aos $|\psi\rangle$ ” (5).

Referências

1. ENQUIST, M.; ARAK, A. Symmetry, beauty and evolution. *Nature*, v.372, n. 6502, p.169, 1994.
2. WEISSTEIN, E. W. *Buffon's needle problem*. 2003. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/BufonsNeedleProblem.html>. Acesso em: 09.03.2021.
3. GALPERIN, G. Playing pool with π (the number π from a billiard point of view). *Regular and Chaotic Dynamics*, v.8, n.4, p.375, 2003.
4. KATOK, A. Billiard table as a playground for a mathematician. In: PRASOLOV, V.; ILYASHENKO, Y. (eds.). *Surveys in modern mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. p.216-242. (London Mathematical Society Lecture Note Series).
5. BROWN, A. R. Playing Pool with $|\psi\rangle$: from bouncing billiards to quantum search. *Quantum Physics*, v.4, p.357, 2020.
6. SANDERSON, G. *The most unexpected answer to a counting puzzle*. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs>. Acesso em: 13.12.2020.
7. NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica: mecânica*. São Paulo: Editora Blucher, 1998. v.1.
8. RAFAT, M. Z.; DOBIE, D. *Throwing π at a wall*. Disponível em: arXiv preprint <https://arxiv.org/abs/1901.06260>, 2019. Acesso em: 08.03.21.
9. ARETXABALETA, X. M. *et al.* The Dynamics of digits: calculating Pi with Galperin's billiards. *Mathematics*, v.8, p.509, 2020.
10. NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L.. *Quantum computation and quantum information*. 10th ed. New York: Cambridge University Press, 2010.
11. GROVER, L. K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. In: ANNUAL ACM SYMPOSIUM THEORY OF COMPUTING, 28th, STOC96, Philadelphia. *Proceedings [...]* Philadelphia: 1996.
12. KAYE, P.; LAFLAMME, R.; MOSCA, M. *An introduction to quantum computing*. Oxford: Oxford University Press, 2007.
13. VAN DER POORTEN, A.; APÉRY, R. A proof that Euler missed.... *The Mathematical Intelligencer*, v.1, p.195, 1979.